Institut National Polytechnique

Cycle Préparatoire - 1ère année

Mécanique 1

CORRIGÉ de l'examen du 2 mars 2010

B. Problème (14 points) **Impact d'un astéroïde sur une planète du système solaire** (d'après

1. Le mouvement de A dans le voisinage de P est plan car le moment cinétique est une constante vectorielle, la force s'exerçant sur A étant une force centrale dont le moment en C est nul.

2. a) En fonction de la distance $r = AP$, l'expression de l'énergie potentielle de gravitation entre A et P est bien connue :

$$\epsilon_p = -\frac{GMm}{r}$$

le signe moins exprimant le caractère attractif de l'interaction lorsque la constante additive est choisie nulle.

b) Comme il n'y a pas de force non conservative, l'énergie mécanique se conserve : $\epsilon = \epsilon_k + \epsilon_p$ soit

$$\frac{mv_i^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

On en déduit :

$$v^2 = v_i^2 + \frac{2GM}{r}$$

3. a) Il existe trois types de trajectoires coniques selon la valeur de l'énergie : si est faible, la trajectorie est une ellipse, si est forte la trajectoire est une hyperbole ; entre les deux, pour une valeur précise de l'énergie la trajectoire est une parabole.

b) L'équation polaire de la trajectroire conique de la particule fictive dans le problème à deux corps a pour expression :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{L^2}{\mu|K|} \quad \text{et} \quad e = \left(1 + \frac{2\epsilon L^2}{\mu K^2}\right)^{1/2}$$

La quantité p homogène à une longueur est le paramètre de la conique, le facteur e sans dimension est l'excentricité, μ est la masse réduite, $K = -GMm$ est la constante d'interaction. Pour $m/M \ll 1$, alors $\mu \approx m$ et ces quantités se réduisent à :

$$p = \frac{v_i^2 b_i^2}{GM} \quad \text{et} \quad e = \left(1 + \frac{v_i^4 b_i^2}{G^2 M^2}\right)^{1/2}$$

c) Il vient :

$$b = (c^2 - a^2)^{1/2} = p\left[\frac{e^2}{(e^2-1)^2} - \frac{1}{(e^2-1)^2}\right]^{1/2} = \frac{p}{(e^2-1)^{1/2}}$$

4. a) La distance minimale r_{min} (péricentre) entre A et P est faciel à exprimer en fonction de p et de e, puisqu'elle est définie par $\varphi = 0$:

$$r_{min} = \frac{p}{1+e}$$

b) On en déduit l'écriture suivante de l'équation polaire de la trajectoire, ainsi que les expressions de a, b et c :

$$r = r_{min}\frac{1+e}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)} \qquad a = r_{min}\frac{1}{e-1} \qquad b = r_{min}\left(\frac{e+1}{e-1}\right)^{1/2} \qquad c = r_{min}\frac{e}{e-1}$$

c) Sur le triangle rectangle PBO, on voit que :

$$\frac{b_i}{c} = \sin\alpha = \sin(\pi - \varphi_\infty) = \sin\varphi_\infty \quad \text{avec} \quad \cos\varphi_\infty = -\frac{1}{e}$$

puisque, pour $\varphi = \varphi_\infty$, r est infini. Il vient donc :

$$\frac{b_i}{c} = \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)^{1/2} \quad \text{d'où} \quad b_i = r_{min}\left(\frac{e+1}{e-1}\right)^{1/2} = b$$